

# ОПИСАНА И УПИСАНА ТЕЛА

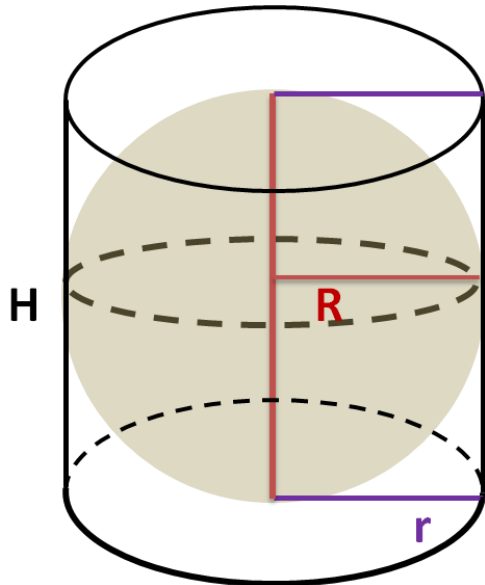
1. Око лопте су описани једнакостранични ваљак и једнакостранична купа. Одредити размере површина и запремина ова три тела.

R-полупречник лопте

$$V_{\text{lopta}} = \frac{4}{3}R^3\pi \quad P_{\text{lopta}} = 4R^2\pi$$

[Прочитати на блогу](https://mirjanaradovicsg.wordpress.com/odbrana-sirakuze/)

<https://mirjanaradovicsg.wordpress.com/odbrana-sirakuze/>



Једнакостранични ваљак ( $H=2r$ ) описан око лопте

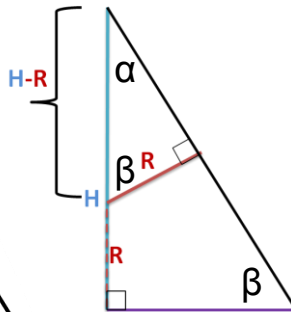
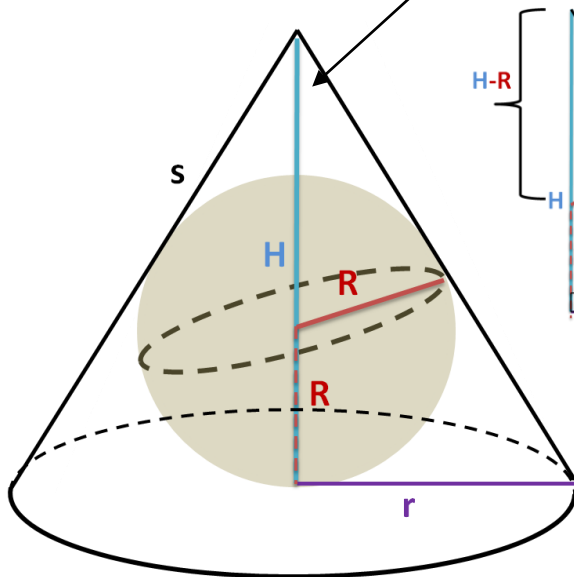
$$r = R$$

$$H = 2R$$

$$\left. \begin{aligned} B &= r^2\pi = R^2\pi \\ M &= 2rH\pi = 4R^2\pi \end{aligned} \right\} P_{\text{valjak}} = 2B + M = 6R^2\pi$$

$$V_{\text{valjak}} = BH = 2R^3\pi$$

Једнакостранична купа ( $s=2r \Rightarrow 30^\circ$ ) око лопте:



$$s = 2r$$

Из сличности правоуглих троуглова:

$$r : R = s : (H - R)$$

$$r : R = 2r : (H - R)$$

$$r(H - R) = 2Rr$$

$$H - R = 2R \Rightarrow H = 3R$$

$$s^2 = H^2 + r^2 \Rightarrow 4r^2 = 9R^2 + r^2$$

$$3r^2 = 9R^2 \Rightarrow r^2 = 3R^2 \Rightarrow r = R\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{aligned} B &= r^2\pi = 3R^2\pi \\ M &= sr\pi = 2r^2\pi = 6R^2\pi \end{aligned} \right\} P_{\text{kupa}} = B + M = 9R^2\pi$$

$$V_{\text{kupa}} = \frac{1}{3}r^2H\pi = 3R^2\pi$$

Размере:

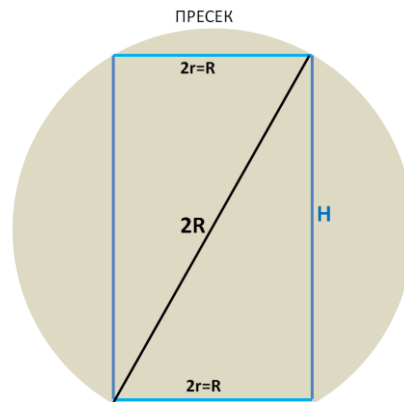
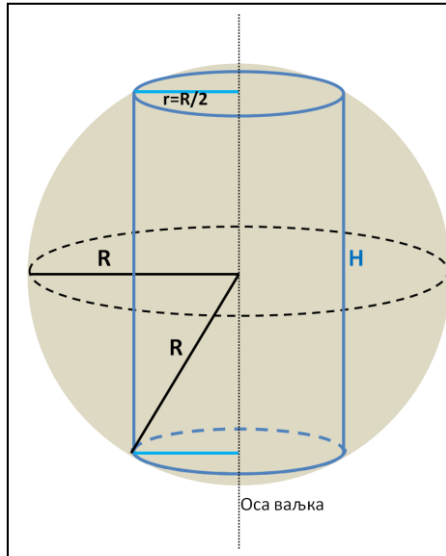
$$P_{\text{lopta}} : P_{\text{valjak}} : P_{\text{kupa}} = 4R^2\pi : 6R^2\pi : 9R^2\pi = 4 : 6 : 9$$

$$V_{\text{lopta}} : V_{\text{valjak}} : V_{\text{kupa}} = \frac{4}{3}R^3\pi : 2R^3\pi : 3R^3\pi = \frac{4}{3} : 2 : 3 = 4 : 6 : 9$$

2. У лопту полупречника  $R$  уписан је ваљак, чија оса садржи средиште лопте, а полупречник основе је  $\frac{R}{2}$ . Одредити запремину лопте и ваљка.

R-полупречник лопте

$$V_{\text{лопта}} = \frac{4}{3}R^3\pi$$



$$H^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

$$H = R\sqrt{3}$$

$$V_{\text{ваљак}} = BH$$

$$V_{\text{ваљак}} = r^2\pi H$$

$$V_{\text{ваљак}} = \left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi R\sqrt{3}$$

$$V_{\text{ваљак}} = \frac{R^3\sqrt{3}}{4}\pi$$

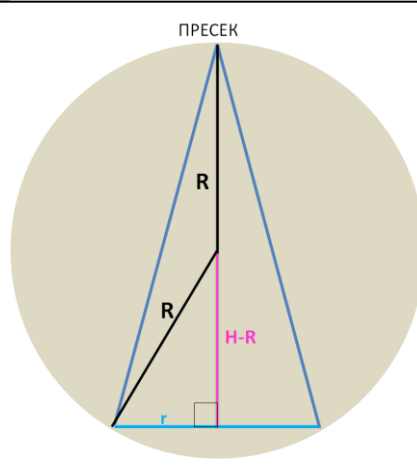
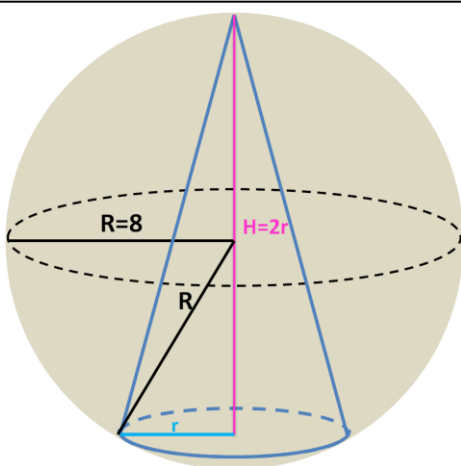
Однос запремина:

$$V_{\text{лопта}} : V_{\text{ваљак}} = \frac{4R^3\pi}{3} : \frac{R^3\sqrt{3}\pi}{4}$$

$$V_{\text{лопта}} : V_{\text{ваљак}} = \frac{4}{3} : \frac{\sqrt{3}}{4} = 16 : 3\sqrt{3}$$

3. У лопту полупречника  $8\text{dm}$  уписана је купа чија је висина једнака пречнику основе. Одредити запремину купе.

лопта :  $R = 8\text{dm}$     купа :  $H = 2r$



$$r^2 = R^2 - (H - R)^2$$

$$r^2 = 64 - (2r - 8)^2$$

$$r^2 = 64 - 4r^2 + 32r - 64$$

$$5r^2 - 32r = 0$$

$$r(5r - 32) = 0$$

$$r = 0(\perp) \vee r = \frac{32}{5} \Rightarrow H = 2 \cdot \frac{32}{5} = \frac{64}{5}$$

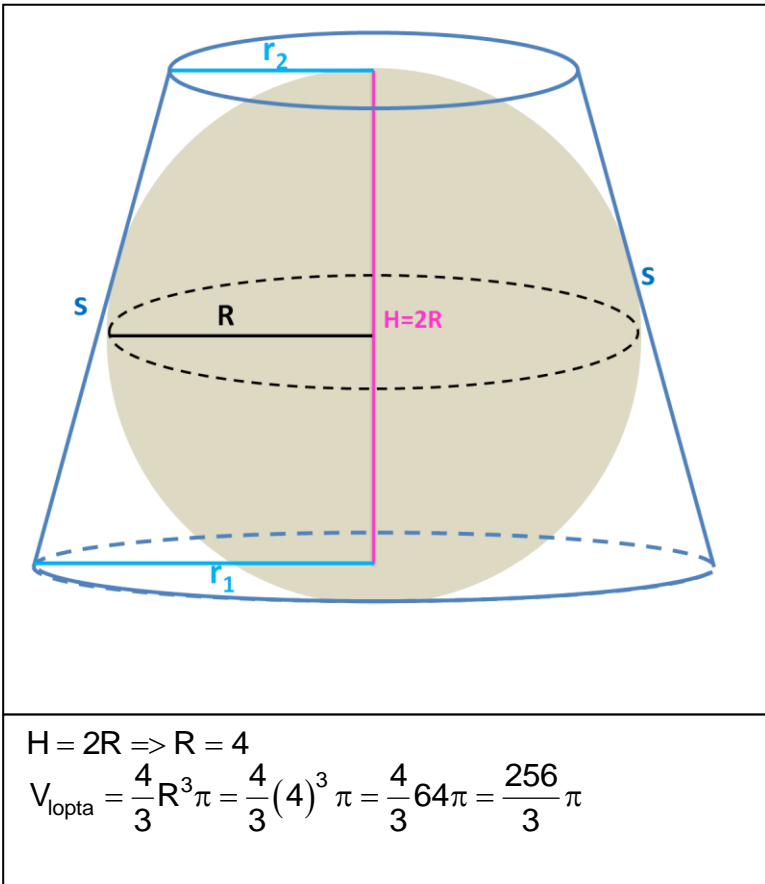
$$B = r^2\pi = \frac{1024}{25}\pi$$

$$V_k = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1024}{25}\pi \cdot \frac{64}{5} = \frac{65536}{375}\pi\text{dm}^3$$

4. Збир квадрата полупречника основе зарубљене купе је  $65\text{cm}^2$  а висина је  $8\text{cm}$ . У зарубљену купу је уписана лопта. Одредити однос запремина лопте и зарубљене купе.

$$r_1^2 + r_2^2 = 65$$

$$H = 8$$



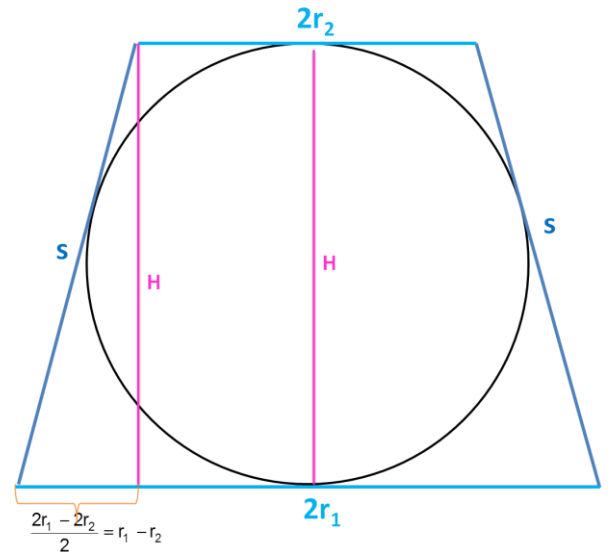
$$H = 2R \Rightarrow R = 4$$

$$V_{\text{лопта}} = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}(4)^3\pi = \frac{4}{3}64\pi = \frac{256}{3}\pi$$

Однос запремина:

$$V_{\text{зкупа}} : V_{\text{лопта}} = \frac{256\pi}{3} : 216\pi = \frac{256}{3} : 216 = \frac{32}{3} : 27 = 32 : 81$$

Осни пресек:



Тангентни четвороугао:

$$s + s = 2r_1 + 2r_2 \Rightarrow 2s = 2r_1 + 2r_2$$

$$\Rightarrow s = r_1 + r_2$$

$$s^2 = H^2 + (r_1 - r_2)^2$$

$$(r_1 + r_2)^2 = 8^2 + (r_1 - r_2)^2$$

$$r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = 64 + r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2$$

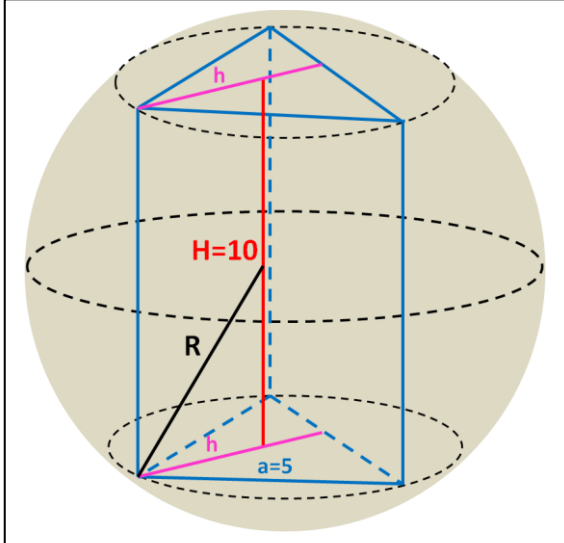
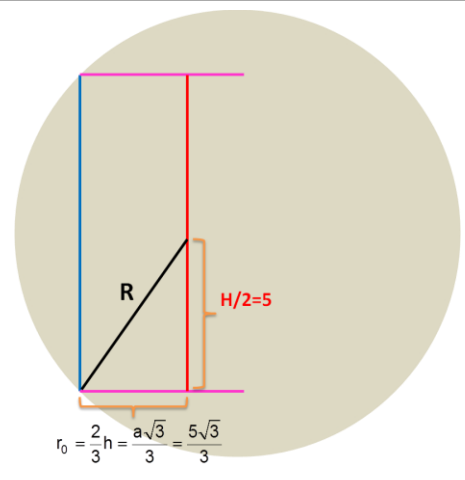
$$4r_1r_2 = 64 \Rightarrow r_1r_2 = 16$$

$$V_{\text{зкупа}} = \frac{H\pi}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$

$$V_{\text{зкупа}} = \frac{8\pi}{3}(65 + 16) = 216\pi$$

5. Око правилне тростране призме основне ивице дужине 5см и висине 10см описана је лопта. Одредити однос запремина призме и лопте.

$a = 5$   
Призма:  $H = 10$

$$V_{\text{prizma}} = BH = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} H = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 10 = \frac{125\sqrt{3}}{2}$$



$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r_0^2$$

$$R^2 = 25 + \frac{25 \cdot 3}{9}$$

$$R^2 = 25 + \frac{25}{3}$$

$$R^2 = \frac{100}{3}$$

$$R = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{\text{lopta}} = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

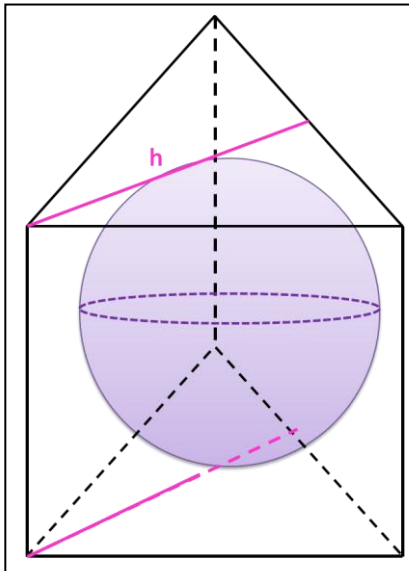
$$V_{\text{lopta}} = \frac{4}{3} \frac{1000 \cdot 3\sqrt{3}}{27} \pi$$

$$V_{\text{lopta}} = \frac{4000\sqrt{3}\pi}{27}$$

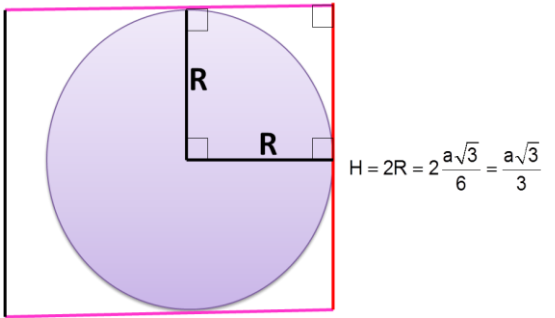
Однос запремина:

$$V_{\text{lopta}} : V_{\text{prizma}} = \frac{4000\sqrt{3}\pi}{27} : \frac{125\sqrt{3}}{2} = \frac{32\pi}{27} : \frac{1}{2} = 64\pi : 27$$

6. У правилну тространу призму чија је основна ивица  $a$  уписана је лопта. Одредити површину и запремину оба тела.



Пресек:

$$r_0 = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} = R$$


$$H = 2R = 2 \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

ЛОПТА:

$$P_{\text{lopta}} = 4R^2\pi = 4 \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \pi$$

$$P_{\text{lopta}} = 4 \frac{3a^2}{36} \pi = \frac{a^2\pi}{3}$$

$$V_{\text{lopta}} = \frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{4}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3 \pi$$

$$V_{\text{lopta}} = \frac{4}{3} \frac{3\sqrt{3}a^3}{216} \pi = \frac{a^3\sqrt{3}\pi}{54}$$

ПРИЗМА:

$$P_{\text{prizma}} = 2B + M = 2 \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + a^2\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{\text{prizma}} = BH = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{4}$$

7. Висина правилне четворостране призме је 2см, а основна ивица је 4см. Одредити полупречник лопте описане око ове призме.

$a = 4\text{cm}$   
 $H = 2\text{cm}$

Пресек:

$D^2 = H^2 + d^2$   
 $(2R)^2 = 4 + (4\sqrt{2})^2$   
 $4R^2 = 4 + 32 = 36$   
 $R^2 = 9$   
 $R = 3$

8. Правилна четворострана пирамида има све ивице дужине  $\sqrt{2}$ . Израчунати полупречник лопте уписане у ову пирамиду.

$a = s = \sqrt{2}$

$H^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1$

$H = 1$

$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{a}{2} : h = R : (H - R)$   
 $\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{6}}{2} = R : (1 - R)$   
 $\sqrt{2} : \sqrt{2}\sqrt{3} = R : (1 - R)$   
 $1 : \sqrt{3} = R : (1 - R)$   
 $1 - R = \sqrt{3}R \Rightarrow 1 = R(\sqrt{3} + 1)$   
 $R = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

9. Основне ивице тростране пирамиде су 13см,14см и 15см. Растојање врха пирамиде од сваке основне ивице је 5см. Одредити полупречник лопте која је уписана у ову пирамиду.

$$a = 13\text{cm}, b = 14\text{cm}, c = 15\text{cm}$$

$$S_{\text{poluobim}} = s_{\text{po}} = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

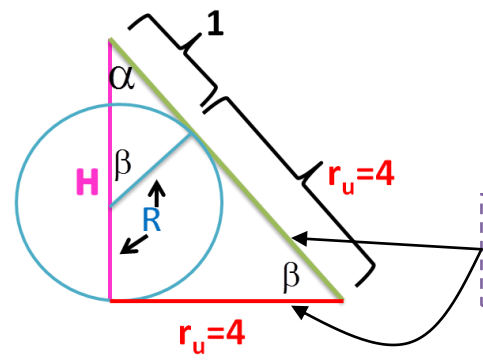
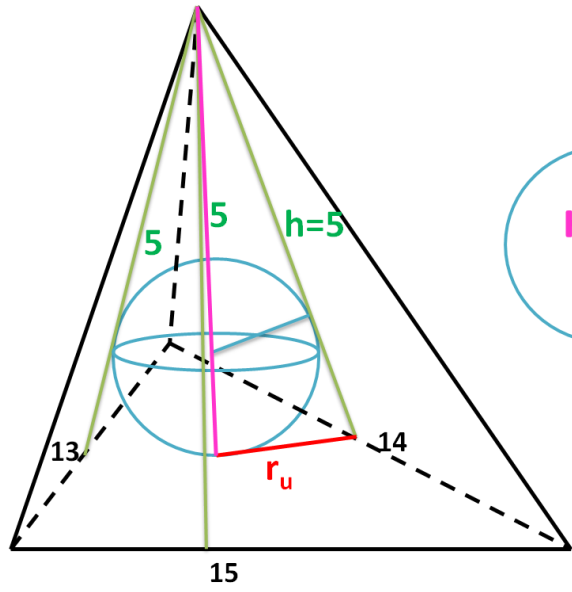
$$B = \sqrt{s_{\text{po}}(s_{\text{po}} - a)(s_{\text{po}} - b)(s_{\text{po}} - c)}$$

$$B = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

$$B = r_u s_{\text{po}}$$

$$84 = r_u \cdot 21 \Rightarrow r_u = 4$$

Растојање врха пирамиде од основне ивице=висина бочне стране (апотема)



Тангентне дужи из исте тачке су једнаке

Из сличности троуглова:

$$r_u : h = R : (H - R)$$

$$4 : 5 = R : (3 - R)$$

$$4(3 - R) = 5R$$

$$12 - 4R = 5R$$

$$12 = 9R \Rightarrow R = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$H^2 = h^2 - r_u^2 = 25 - 16 = 9$$

$$H = 3$$

10. Дата је зарубљена купа са полупречницима основа 20см и 5см, запремине  $3150\pi\text{cm}^3$ . У њу је уписан једнакостранични ваљак тако да се једна основа ваљка налази у већој основи зарубљене купе а друга основа додирује омотач зарубљене купе. Израчунати површину ваљка.

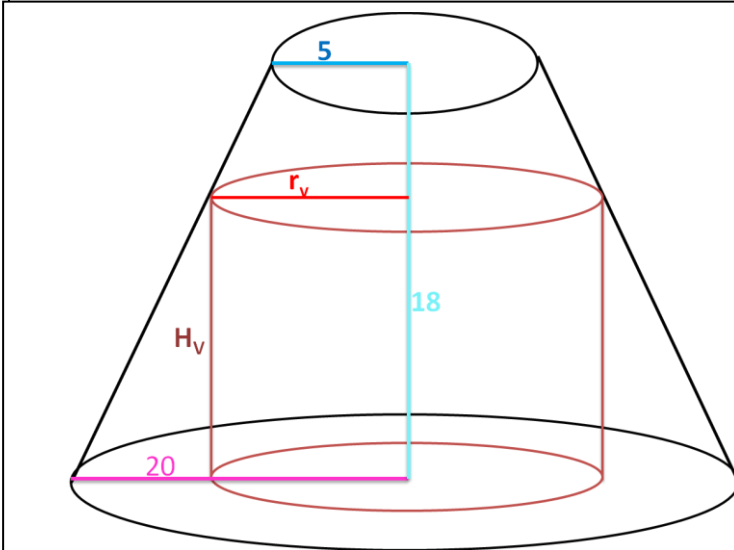
$$r_1 = 20\text{cm}$$

$$r_2 = 5\text{cm}$$

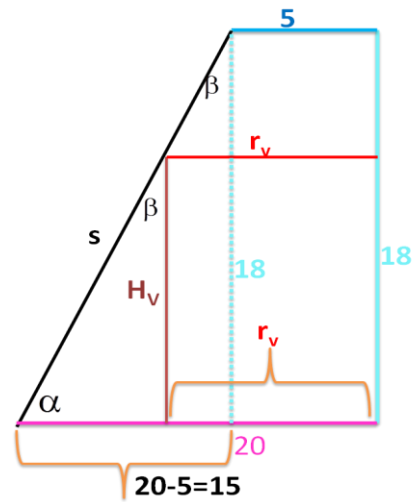
$$V = 3150\pi\text{cm}^3$$

$$V = \frac{H\pi}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$

$$3150\pi = \frac{H\pi}{3}(400 + 100 + 25) = 175H\pi \Rightarrow H = \frac{3150\pi}{175\pi} = 18$$



Једнакостранични ваљак  $\Rightarrow H_V = 2r_V$



Из сличности правоуглих троуглова:

$$15 : 18 = (20 - r_V) : H_V$$

$$5 : 6 = (20 - r_V) : 2r_V$$

$$10r_V = 120 - 6r_V$$

$$16r_V = 120 \Rightarrow r_V = \frac{120}{16} = \frac{15}{2}$$

$$H_V = 2r_V = 15$$

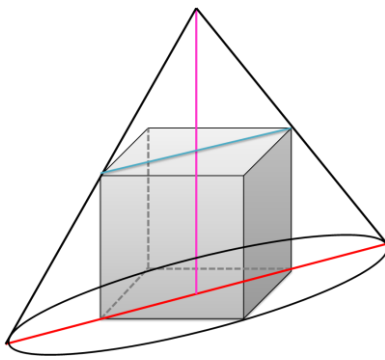
$$P_{\text{Valjak}} = 2B + M = 2r_V^2\pi + 2r_V H_V\pi$$

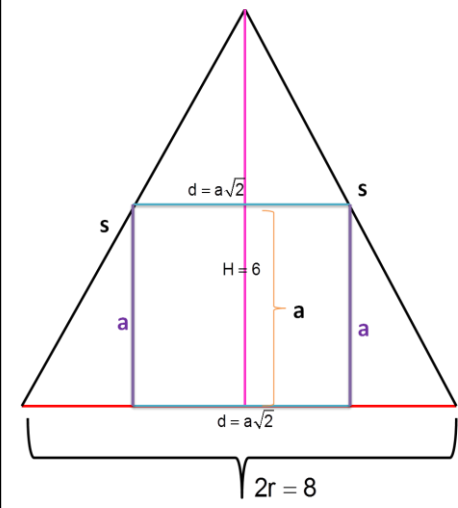
$$P_{\text{valjak}} = 2 \cdot \frac{225}{4}\pi + 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 15\pi$$

$$P_{\text{Valjak}} = \frac{225\pi}{2} + 225\pi = \frac{675\pi}{2}\text{cm}^2$$

11. У правилну купу висине 6см и полупречника основе 4см уписана је коцка, чија једна страна лежи у основи купе, а остала темена су на омотачу. Одредити запремину коцке.

$H = 6\text{cm}$   
 $r = 4\text{cm}$





Из сличности троуглова:

$$2r : d = H : (H - a)$$

$$8 : a\sqrt{2} = 6 : (6 - a)$$

$$48 - 8a = 6a\sqrt{2} \quad /: 2$$

$$24 = 4a + 3a\sqrt{2}$$

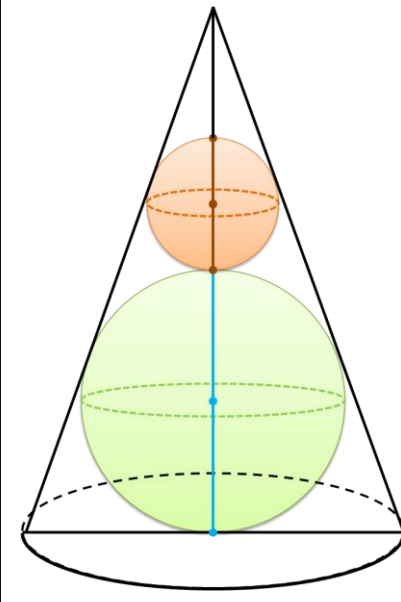
$$24 = a(3\sqrt{2} + 4)$$

$$a = \frac{24}{3\sqrt{2} + 4} \cdot \frac{3\sqrt{2} - 4}{3\sqrt{2} - 4} = \frac{24(3\sqrt{2} - 4)}{18 - 16}$$

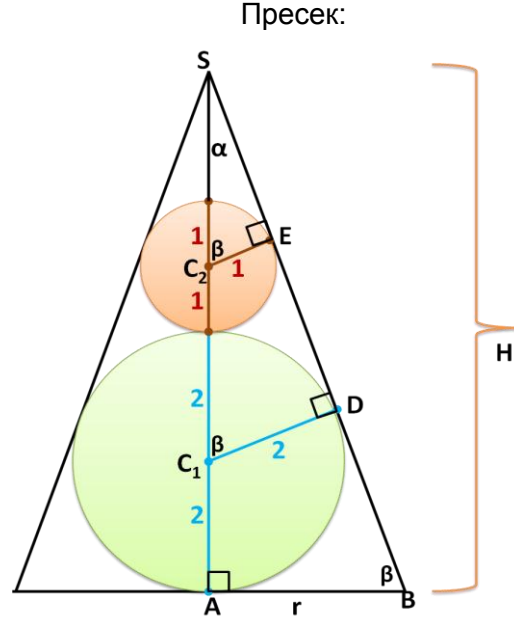
$$a = 12(3\sqrt{2} - 4)$$

$$V_{\text{коцка}} = a^3 = 12^3(3\sqrt{2} - 4)^3 \text{ cm}^3$$

12. У купу су постављене две лопте, полупречника 1см и 2см. Мања лопта додирује омотач купе, а већа додирује основу купе, омотач купе и мању лопту. Израчунати запремину купе.



Пресек:



(1)  $\triangle SC_1D \sim \triangle SC_2E$   
 $SC_1 : C_1D = SC_2 : C_2E$   
 $(H - 2) : 2 = (H - 5) : 1$   
 $1(H - 2) = 2(H - 5)$   
 $H - 2 = 2H - 10 \Rightarrow H = 8$

(2)  $\triangle SC_2E$   
 $|SE|^2 = |SC_2|^2 - |C_2E|^2$   
 $|SE|^2 = (H - 5)^2 - 1^2$   
 $|SE|^2 = 9 - 1 = 8$   
 $SE = \sqrt{8}$

(3)  $\triangle SC_2E \sim \triangle ABS$   
 $SE : C_2E = SA : AB$   
 $\sqrt{8} : 1 = H : r$   
 $\sqrt{8} : 1 = 8 : r$

Запремина купе:

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3} \cdot 8\pi \cdot 8$$

$$V = \frac{64\pi}{3}$$